c- Montrer que le cercle de diamètre [IJ] passe par Ω.

PROBLEME (10 points)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = x^n e^{-nx}$.

On appelle C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 3 cm)

A-1)a- Dresser le tableau de variation de la fonction f_n .

b- Déterminer la position relative des courbes C_n et C_{n+1} .

2)a- Tracer C_1 et C_2 en précisant les demi-tangentes à l'origine .

b- Calculer l'aire S_n du domaine limité par la courbe C_1 et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = n$.

c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

B- $\forall x \in IR^+$ et $\forall n \in IN^*$, on pose : $F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt$

1) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a : $0 \leq f_1(t)e^{\frac{t}{2}} \leq 1$

2)a- Montrer alors que , $\forall t \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$, on a : $0 \leq f_n(t) \leq e^{-\frac{t}{2}}$

b- En déduire que , $\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a : $0 \leq F_n(x) \leq 2$.

C - Pour tout réel $u \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on pose : $G_n(u) = \int_0^u t^n e^{-t}dt$

1)a- Montrer que,$\forall n \in IN^* \setminus \{1\}$,on a : $G_n(u) = -u^n e^{-u} + nG_{n-1}(u)$

b- En déduire que :$G_n(u) = -n!e^{-u}\sum_{p=2}^{n}\frac{u^p}{p!} + n!G_1(u)$

2) Montrer alors que : $\lim\limits_{u\to+\infty} G_n(u) = n!$

3)a- Montrer que ,$\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a : $G_n'(nx) = n^n f_n(x)$
f_n étant la fonction définie dans la partie **A-** .

b- Montrer alors que,$\forall x \geq 0$ et $\forall n \in IN^*$,on a $F_n(x) = \frac{1}{n^{n+1}} G_n(nx)$

c- En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

UNE CORRECTION POSSIBLE

EXERCICE 1

1) Posons $z = x + iy$ avec $(x,y) \in IR^2$

$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow x = 2 \Leftrightarrow \frac{z+\bar{z}}{2} = 2$ car $x = Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 4$